PET-CEM

Apostila de Cálculo Vetorial

Iury de Araujo

Sumário

Com o intuito de auxiliar no aprendizado de algumas disciplinas o grupo PET-CEM resolveu incluir em suas atividades o desenvolvimento de algumas apostilas. Tais apostilas foram feitas em cima da ementa da matéria de interesse, bem como do seu livro texto.
Como mencionado acima, o objetivo desta apostila é auxiliar os estudos, em momento algum o aluno deve deixar de lado a leitura do livro texto e o aproveitamento em sala de aula com o professor.
Esta apostila contém somente as principais fórmulas do cálculo vetorial, sem suas deduções nem condições de uso. Portanto, para a leitura da mesma, é tido como pré-suposto que o graduando ja tenha em mente o que existe por traz dessas "simples fórmulas".
Com isso, é fundamental, antes do apoio desta apostila, que o aluno ja tenha tido um contato mais completo com a matéria.

Capítulo 1

Unidade I

1.1 Operações Vetoriais

As operações vetoriais, tais como as escalares, são: adição; subtração; e multiplicação. Esta última podendo ser escalar ou vetorial, como veremos no decorrer do capítulo.

1.1.1 Adição e subtração

São as operações mais simples a serem feitas, apenas sendo somados os vetores termo a termo.

Exemplo 1 (Adição e Subtração vetoriais) *Sendo,* $\vec{u} = < 1, 2, 3 >$ *e* $\vec{v} = < 3, 2, 1 >, calcule:$

a)u+v:
$u+v=<1,2,3>+<3,2,1>$
$u+v=<1+3,\ 2+2,\ 3+1>$
$u+v=<4,\ 4,\ 4,>$

b)u-v:
$u-v=<1,2,3>-<3,2,1>$
$u-v=<1-3,\ 2-2,\ 3-1>$
$u-v=<-2,\ 0,\ 2,>$

1.1.2 Multiplicações Vetoriais

São duas as operações possíveis: a primeira resulta um um escalar, e por isso chamada de Multiplicação Escalar Vetorial; já a segunda tem como resultado um vetor e por isso se diz que é uma Multiplicação Vetorial.
Na escalar, tem-se a multiplicação, termo a termo, dos vetores, para então a soma desses resultados.

Exemplo 2 (Produto Escalar Vetorial) *Sendo,* $\vec{u} = < 1, 2, 3 >$ *e* $\vec{v} = < 3, 2, 1 >, calcule:$

$a) u \cdot v:$
$u \cdot v = < 1, 2, 3 > \cdot < 3, 2, 1 >$
$u \cdot v = 1 * 3 + 2 * 2 + 3 * 1$
$u \cdot v = 10$

Quanto à multiplicação vetorial, existe mais de uma maneira de ser calculada. Aqui será apresentada aquela que é conhecida como o método "da primeira linha". É interessante lembrar, que esta operação fornece o vetor normal aos voetores calculados.

Exemplo 3 (Multiplicação Vetorial) *Sendo,* $\vec{u} = < 1, 2, 3 >$ *e* $\vec{v} = < 3, 2, 1 >, calcule:$

$a) u \times v:$
$u \times v = < 1, 2, 3 > \times < 3, 2, 1 >$
$$u \times v = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$u \times v = \vec{i} * (2 * 1 - 3 * 2) - \vec{j} * (1 * 1 - 3 * 3) + \vec{k} * (1 * 2 - 2 * 3)$
$u \times v = -4\vec{i} + 9\vec{j} - 4\vec{k}$

1.2 Equações Paramétricas de Retas, Planos e outras Superfícies

1.2.1 Retas

A equação de uma reta pode ser obtida por um ponto r_0, pertencente à reta, e o vetor diretor da mesma, ou seja, aquele que dará a direção para a reta. Sendo assim, a equação vetorial de uma reta tem a forma:

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\vec{\mathbf{v}}}$$

Sendo:

$\rightarrow$ **$\mathbf{r}_0$, um ponto pertencente à reta;**
$\rightarrow$ t, parâmetro, ou variável, onde cada valor dado para o mesmo fornece uma posição, $\mathbf{r}$, na
$\rightarrow$ $\vec{\mathbf{v}}$, vetor diretor da reta.

A notação usada para o vetor diretor foi só para uma melhor visualização da equação. Mas, deve-se lembrar de que estamos tratando de cálculo vetorial, ou seja, os termos $\vec{r}$ e $\vec{r_0}$, também são vetores. Eles são, para esclarecimento, vetores que fornecem a posição de um ponto na reta em relação à origem do sistema de coordenadas.

Exemplo 4 *Determine a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos* $(4, -1, 2)$ *e* $(1, 1, 5)$.
$\rightarrow$*São dados dois pontos pertencentes a reta.*
$\rightarrow$*Um deles será diretamente usado da equação de parametrização.*
$\rightarrow$*Ambos os pontos serão usados para definir um vetor diretor da reta.*
$\rightarrow$*Feito isso, basta colocar os resultados obtidos na equação de parametrização e o problema estará resolvido.*
$\boldsymbol{r}_0 =< 4, -1, 2 >$
$\vec{v}= (1, 1, 5) - (4, -1, 2) =< 1 - 4, 1 - (-1), 5 - 2 >$
$\vec{v}=< -3, 2, 3 >$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r_0} + t\,\vec{v}\\ \vec{r} &= < 4, -1, 2 > + t < -3, 2, 3 >\\ \vec{r(t)} &= < 4 - 3t, 2t - 1, 3t + 2 >\end{aligned}$$

Exemplo 5 *Determine a equação da reta que passa pelo ponto* $(-2, 2, 4)$ *e é perpendicular ao plano* $2x - y + 5z = 12$.
$\rightarrow$*É fornecido um ponto pertencente a reta e é dito que a mesma é perpendicular a um plano.*
$\rightarrow$*Temos um ponto na reta, nos falta somente um vetor diretor, aqui chamado de* $\vec{v}$*, para a mesma. Como foi dito que ela é ortogonal ao plano, logo seu vetor* $\vec{v}$ *poderá ser o vetor normal do plano, aqui chamado de* $\vec{n}$.
$\rightarrow$*Sabendo disso e por inspeção à equação do plano que foi fornecida, temos o vetor* $\vec{v}$ *da reta.*
$\rightarrow$*Caso o leitor não se lembre, o vetor* $\vec{n}$ *do plano é facilmente obtido inspecionando os coeficientes das variáveis x,y e z, da equação do plano. No caso o vetor normal será:* $\vec{n}=< 2, -1, 5 >$.
$\rightarrow$*Tendo essas informações, basta substituir na equação da reta.*
$\vec{r_0}=< -2, 2, 4 >$
$\vec{n}=\vec{v}=< 2, -1, 5 >$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r_0} + t\,\vec{v}\\ \vec{r} &= < -2, 2, 4 > + t < 2, -1, 5 >\\ \vec{r(t)} &= < 2t - 2, 2 - t, 5t + 4 >\end{aligned}$$

1.2.2 Planos

Para determinar a equação de um plano são necessários, um ponto pertencente ao mesmo e o seu vetor normal. Assim sendo, definimos um ponto genérico no plano e dizemos que o vetor formado pelos pontos no plano, o genérico e o tido, será ortogonal ao vetor normal do plano. Ou seja, matematicamente, temos que:

$$\boxed{\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}}$$

Considerando um espaço tridimencional e espandindo os termos com as operações vetoriais, ficamos com:

$$\boxed{\text{a(x-x}_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \rightarrow\mathbf{n} &= \text{<a, b, c>, um vetor normal ao plano;} \\ \rightarrow\mathbf{r}_0 &= \text{<}\mathrm{x}_0, y_0, z_0 \text{>, um ponto pertencente ao plano; e} \\ \rightarrow\mathbf{r} &= \text{<x ,y ,z>, um ponto genérico do plano.} \end{aligned}$$

Exemplo 6 *Determine a equação do plano que passa pelo ponto* $(2, 1, 0)$ *e é paralelo a* $x + 4y - 3z = 1$.
→*Ponto pertencente ao plano é dado.*
→*É dito que é paralelo a outro plano. Com isso, podemos usar o vetor normal do plano fornecido para obter a equação do novo plano.*
$\vec{r_0} = < 2, 1, 0 >$
$\vec{n} = < 1, 4, -3 >$

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ 1(x - 2) + 4(y - 1) - 3(z - 0) &= 0 \\ x - 2 + 4y - 4 - 3z &= 0 \\ x + 4y - 3z &= 6 \end{aligned}$$

Exemplo 7 *Determine a equação do plano que passa por* $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ *e* $(6, 3, 1)$.
→*Três pontos no plano são dados.*
→*Naturalmente um será usado como ponto dado do plano.*
→*E utalizaremos os três para definir um vetor normal ao plano.*
→*O vetor normal será definido com o multiplicação vetorial de dois vetores contidos nos planos, estes vetores serão formados por esses três pontos fornecidos.*
$\vec{r_0} = < 3, -1, 1 >$
$\vec{u} \times \vec{w} = \vec{n}$

$\vec{u} = <3, -1, 1> - <4, 0, 2> = <-1, -1, -1>$
$\vec{w} = <6, 3, 1> - <4, 0, 2> = <2, 3, -1>$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u} \times \vec{w} = <4, -3, -1>$
$\vec{n} = <4, -3, -1>$

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ 4(x - 3) - 3(y + 1) - (z - 1) &= 0 \\ 4x - 12 - 3y - 3 - z + 1 &= 0 \\ 4x - 3y - z &= 14 \end{aligned}$$

1.2.3 Superfícies

Nesta seção, serão apresentadas algumas superfícies fundamentais, usadas na matéria.

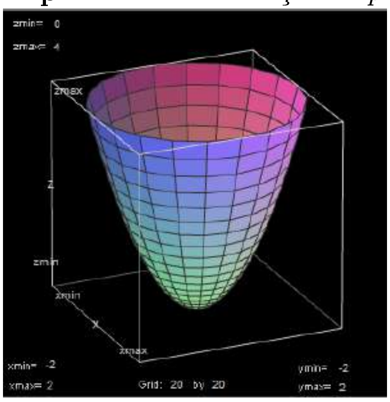
Quádricas

Consiste em superfícies tridimencionais, formadas por equações do segundo grau. Essas superfícies podem ser parametrizadas da forma:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x, y) \end{aligned}}$$

A função dependente de x e y, neste caso, terá a forma de uma das funções quádricas: parábola, hipérbole ou elipse. Esta é obtida, apenas isolando a variável z na equação.

Exemplo 8 *Parametrização do parabolóide* $x^2 + y^2 - z = 0$*, mostrado abaixo:*



$\rightarrow$*Através da imagem, verificam-se duas informações importantes.* 1) *Temos uma parábola em* z. 2) *Temos circunferências no plano* xOy.

$\rightarrow$*Serão mostradas duas parametrizações, uma com coordenadas retangulares e outra com coordenadas polares.*

Coordenada retangular

$\rightarrow$*Esta será feita conforme o apresentado nesta seção.*

$\rightarrow$*Serão usados* x *e* y *como parâmetros e também uma função* $z(x,y)$.

$\rightarrow$*Para tal basta isolar* z *na equação fornecida.*

Assim,
$x^2 + y^2 - z = 0$
$z = x^2 + y^2$

Com isso,

$$r(x,y) = \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x,y) \end{cases}$$

$$r(x,y) = \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x^2 + y^2 \end{cases}$$

$\rightarrow$*Embora os limites não tenham sido especificados, estes podem ser encontrados fazendo* $x^2 + y^2 = r^2$, *onde* r *é o raio do círculo no plano* xOy.

$\rightarrow$*Com isso, vê-se facilmente que* x *e* y *variarão de* $-r$ *à* $+r$.

Usando Coordenadas Polares

$\rightarrow$*Para fazer a parametrização tendo* r *e* θ *como parâmetros, sendo* r *o raio do círculo em* xOy *e* θ *o ângulo entre o raio e* x. *Faz-se* $x = rcos(\theta)$ *e* $y = rsen(\theta)$.

Ficando,

$$r(x,y) = \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$r(r,\theta) = \begin{cases} x &= rcos(\theta) \\ y &= rsen(\theta \\ z &= r^2 \end{cases}$$

$\rightarrow$Com isso temos $\theta \in [0, 2\pi]$ e para acharmos o raio devemos substituir em $z = r^2$ os limites conhecidos de z.

Cílindricas

Superfícies cilíndricas são normalmente expressas em coordenadas cilíndricas, por uma questões de simplicidade dos cáculos. Mas, também, podendo serem expressas em retangulares. Em coordenadas retangulares, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} \\ z &= z \end{aligned}}$$

Já, em coordenadas cilíndricas ficamos com as seguintes equações:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r * cos(\theta) \\ y &= r * sen(\theta) \\ z &= z \end{aligned}}$$

Sendo:

$\rightarrow$r, o raio do cilindro, uma constante;
$\rightarrow \theta, \theta \in [0, 2\pi]$
$\rightarrow$z, a "altura", z, do cilindro

Cônicas

Superfícies cônicas têm uma parametrização bastante parecida com a de uma superfície cilíndrica. Sendo a difença, que: em um cilindro o raio é uma constante; e em um cone ele varia de forma linear com a altura do cone. Sendo assim, podemos fazer:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r(z) * cos(\theta) \\ y &= r(z) * sen(\theta) \\ z &= z \end{aligned}}$$

]

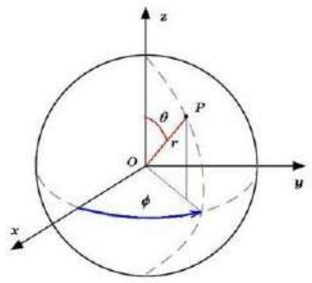
Sendo:

$\rightarrow$r, o raio do cone, agora uma variável que depende da altura do mesmo;
$\rightarrow \theta, \theta \in [0, 2\pi]$;
$\rightarrow$z, a "altura", z, do cone.

Esféricas

Embora dê de parametrizar uma esfera pelo modo apresentado na seção das superfícies quádricas, é muito mais conveniente, para efeito de cálculos, parametrizá-las em coordenadas esféricas. Ficando:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & r * sen(\theta)cos(\phi) \\ y & = & r * sen(\theta)sen(\phi) \\ z & = & r * cos(\theta) \end{array}}$$



Fonte: http://www.commons.wikimedia.org/

Sendo:

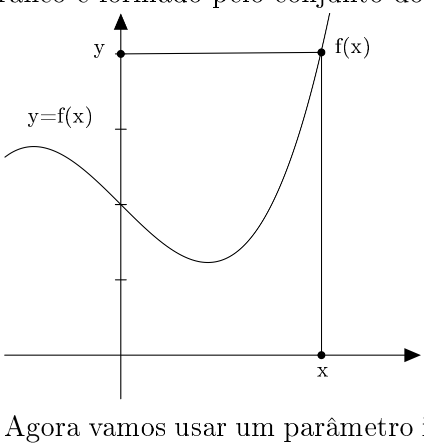
→r, o raio da esfera;
→ϕ, menor ângulo entre x e $r * sen(\theta)$, $\phi \in [0, 2\pi]$;
→θ, menor ângulo entre ρ e z, $\theta \in [0, \pi]$

1.3 Parametrização e Curvas Espaciais

É usual representar funções no plano por:

$$y = f(x), x = g(y)$$

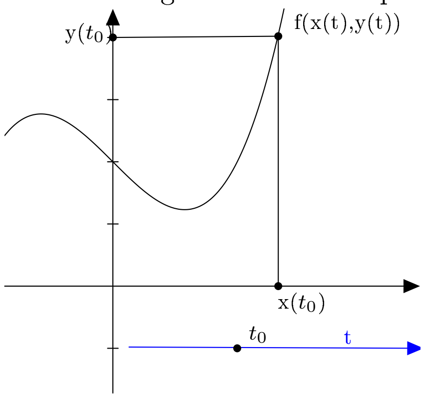
onde x é a variável independente e y é a variável dependente. Neste caso, o gráfico é formado pelo conjunto dos pontos da forma $(x, f(x))$.



Agora vamos usar um parâmetro independente adicional t para descrever x e y, assim :

$$\boxed{f(x(t), y(t)) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}}$$

Neste caso o gráfico é formado pelo conjunto dos pontos da forma $(x(t), y(t))$.



Para o caso de curvas espaciais temos:

$$\boxed{f(x(t), y(t), z(t)) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \text{ é o parâmetro.}}$$

As vantagens de usar esse tipo de representação são:

1. Algumas curvas são melhor representadas quando colocamos x e y em função de uma terceira variável.

2. Do mesmo modo algumas vezes é melhor usar um novo sistema de coordenadas.

Exemplo 9 *Em coordenadas retangulares o círculo de raio 2 é representado por* $x^2 + y^2 = 2^2$.

Neste caso temos duas funções implícitas de x.

$$f(x) = \begin{cases} y = \sqrt{2^2 - x^2} & \text{parte superior} \\ y = -\sqrt{2^2 - x^2} & \text{parte inferior} \end{cases}$$

Observando a Figura 1, percebemos que os pontos do círculo podem ser representados por:

$$r(t) = \begin{cases} x = rcos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = rsen(t) & r = cte \end{cases}$$

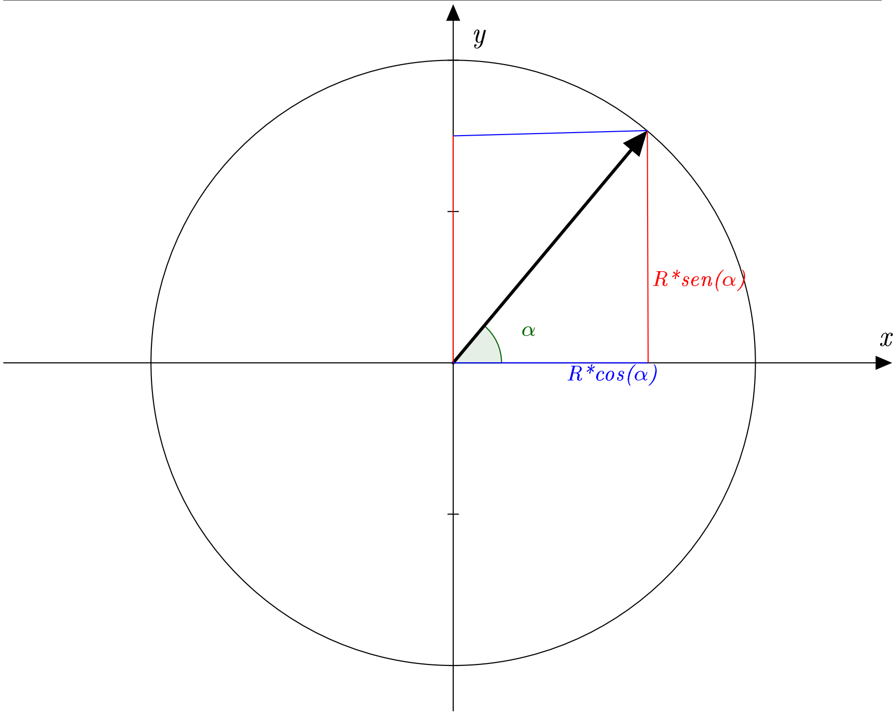


Figura 1

Essa é a representação paramétrica do círculo.

1.4 Funções Vetoriais e Cálculos de Campos Vetoriais

É interessante colocar a definição dessas funções segundo James Stewart:

"Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento do seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função de valor vetorial**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Em particular estamos interessados é funções $\mathbf{r}$ cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que para todo número t no domínio de $\mathbf{r}$ existe um único vetor deV_3 denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são os componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f, g e h são funções de valor real chamadas de **funções componentes** de $\mathbf{r}$ e escrevemos:

$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) = <\mathrm{f(t), g(t), h(t)}>$$
$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{f(t)}\mathbf{i} + \mathrm{g(t)}\mathbf{j} + \mathrm{h(t)}\mathbf{k}$$

"

Campos vetoriais são campos que associam a cada ponto do seu espaço um vetor. Neste capítulo serão vistos conceitos de cálculos para esses campos que são expressos por funções vetoriais.

1.4.1 Aplicação do Cálculo Diferencial e Integral às Funções Vetoriais

$\rightarrow$ O limite de uma função vetorial é calculado fazendo o mesmo limite para cada uma de suas funções componentes.

$$\boxed{\lim_{t\to a} \mathbf{r} = < \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) >}$$

$\rightarrow$ A derivada de uma função vetorial é calculada fazendo a derivada de cada uma de suas funções componentes.

$$\boxed{\mathbf{r}\text{'(t)} = <\text{f'(t), g'(t), h'(t)}>}$$

$\rightarrow$ A integral de uma função vetorial é calculada fazendo a integral para cada uma de suas funções componentes.

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = < \int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt >}$$

1.5 Comprimento de Arco

Para uma curva em coordenadas cartesianas, temos:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}} dx}$$

Supondo uma curva **C** descrita pelos parâmetros $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$ e $f'(t) > 0$, que quer dizer que **C** é percorrida somente uma vez, temos:

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (\frac{dy/dt}{dx/dt})^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (\frac{dy/dt}{dx/dt})^2 f'(t) dt}}$$

Theorem 1 *Se uma curva* ***C*** *for descrita por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde $t \in [\alpha, \beta]$, onde f' e g' são contínuas em [α, β] e* ***C*** *é percorrida somente uma vez quanto t varia de α até beta então o comprimento de* ***C*** *é dado por:*

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dx}{dt})^2} dt}$$

Exemplo 10 ***Comprimento de um círculo***

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dx}{dt})^2} dt \\
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{d(rsen(t))}{dt})^2 + (\frac{d(rcos(t))}{dt})^2} dt \\
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(rcos(t))^2 + (-rsen(t))^2} dt \\
&\vdots \\
L &= 2\pi r
\end{aligned} \tag{1.1}$$

1.6 Integrais de Linha

As integrais de linha se assemelham às integrais ja vistas em outros cálculos. Sua diferença é que não é mais calculada em um invervalo [a,b], mas sim ao longo de uma curva C. Para o cálculo de uma integral de linha, a mesma será reduzida a uma integral normal. Para tal será utilizada a noção de comprimento de arco.

Theorem 2 *Se f é definida sobre uma curva lisa C, então a* ***integral de linha de f sobre C*** *é:*

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\Delta x_i, \Delta y_i)\Delta s_i}$$

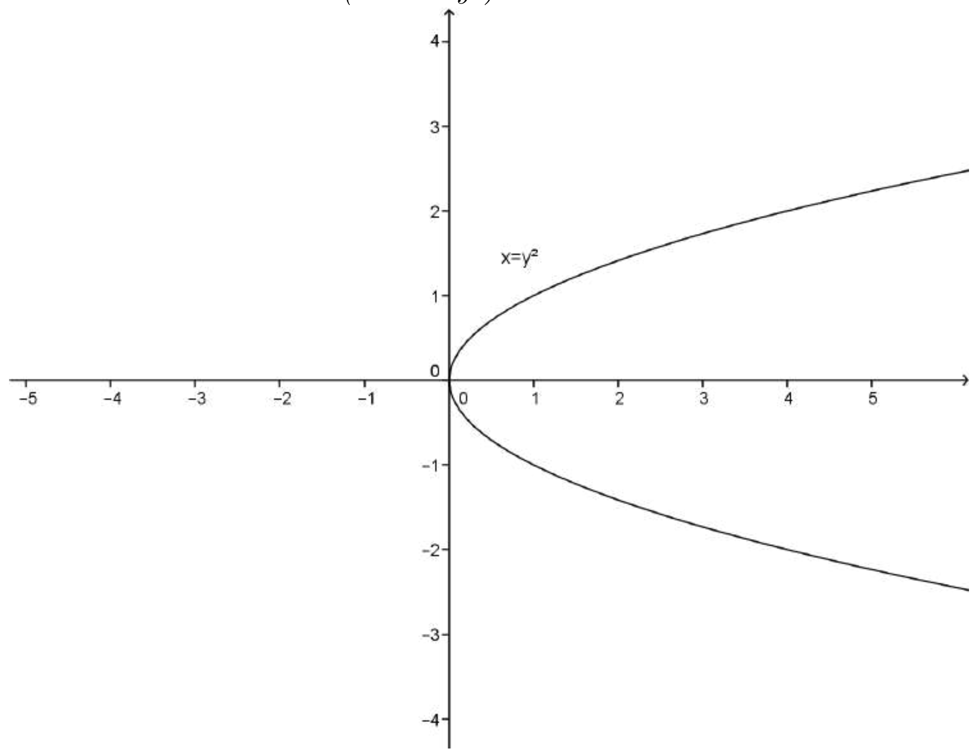
Se esse limite existir.

Tente pensar que as integrais de linha são as infinitas somas, e por isso integral, de pequenas variações da função multiplicadas pelo comprimento de arco "andado"com essas variações.
Com isso, podemos introduzir o conceito de comprimento de arco na integral de linha e assim, reduzi-la a uma integral simples, que irá variar de acordo com a parametrização da curva C.

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dx}{dt})^2}dt}$$

Repare que agora temos um parâmetro que descreve a curva, nesse caso chamado de t. Repare também que ao parametrizar a curva, fazendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$, também foram substituídas as variáveis x e y da função, por suas respectivas parametrizações. Para um melhor entendimento, seguem alguns exemplos:

Exemplo 11 *Calcule a integral de linha da da função $f = y$,com $x \in [0,2]$, com a curva mostrada abaixo ($C : x = y^2$):*



$\rightarrow$*Se observarmos, veremos que a curva ja é dada paramatrizada, com:*

$$r(x) = \begin{cases} x &= x \\ y &= \sqrt{x} \end{cases}$$

$\rightarrow$*Para seguir uma notação padrão, utilizaremos a variável t para a parametrização. Ficando:*

$$r(t) = \begin{cases} x &= t \\ y &= \sqrt{t} \end{cases}$$

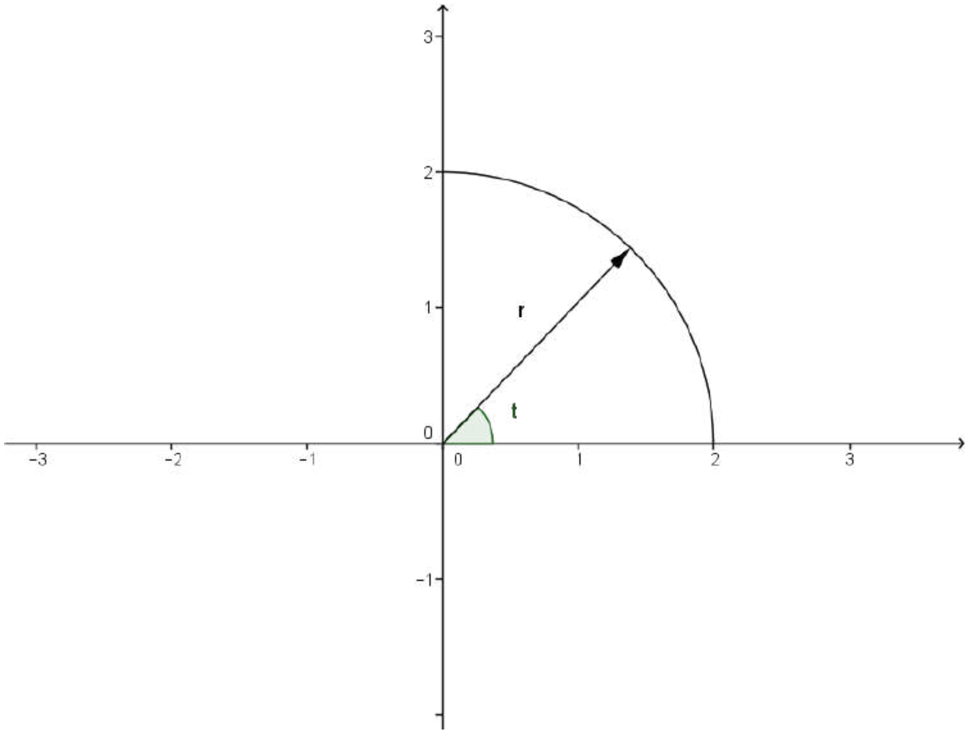
$\rightarrow$*Tendo a função escalar, $f = y$, e a parametrização da curva. Para o cálculo da integral de linha basta utilizar a definição.*
Segue a resolução:

$\rightarrow$*Como as questões de integrais de linha exigem uma série de passos para a concretização do cálculo. Calcularemos antes algumas informações que serão usadas na integral.*

$$\begin{aligned}
r(t) &= \left\langle t; \sqrt{t} \right\rangle \\
f(r(t)) &= \sqrt{t} \\
r'(t) &= \left\langle 1; \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rangle \\
\left| r'(t) \right| &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y)ds &= \int_t f(r(t)) \left| r'(t) \right| dt \\
\int_C f(x,y)ds &= \int_t (\sqrt{t}) \sqrt{\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt \\
\int_C f(x,y)ds &= \int_0^2 (\sqrt{t}) \sqrt{\left(\frac{1}{t} \right) + (1)} dt \\
&\vdots \\
\int_C f(x,y)ds &= \int_0^2 \sqrt{t+1} dt \\
&\vdots \\
\int_C f(x,y)ds &= \frac{3}{2} \left[(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\
&\vdots \\
\int_C f(x,y)ds &= \frac{3}{2}(\sqrt{27} - 1)
\end{aligned}$$

Exemplo 12 *Calcule a integral de linha da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre a porção do primeiro quadrante de um círculo de raio $r = 2$ com o centro na origem.*



→É notória a conveniência, não a obrigatoriedade, do uso de coordenadas polares.

→Para este caso, temos que:

$$r(t)=\begin{cases} x = rcos(t) \\ y = rsen(t) \end{cases} \quad \begin{array}{lcl} f(x,y) & = & x^2+y^2 \\ f(x(t),y(t)) & = & (rcos(t))^2+(rsen(t))^2 \\ f(r(t)) & = & r^2 \end{array}$$

Assim sendo, ficamos com:

$$\begin{array}{lcl} r(t) & = & \langle 2cos(t); 2sen(t)\rangle \\ f(r(t)) & = & 4 \\ r'(t) & = & \langle -2sen(t); 2cos(t)\rangle \\ \left|r'(t)\right| & = & \sqrt{4(sen^2(t)+cos^2(t))}=2 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\int_C f(x,y)ds &= \int_t f(r(t))\left|r'(t)\right| dt \\
\int_C f(x,y)ds &= \int_t (4)(2)dt \\
\int_C f(x,y)ds &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&\vdots \\
\int_C f(x,y)ds &= 8\,[t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\vdots \\
\int_C f(x,y)ds &= 4\pi
\end{aligned}
$$

1.7 Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Theorem 3 *Seja* $\boldsymbol{F}$ *um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa* C *dada pela função vetorial* $\mathbf{r}(t)$, $a \leq tb$. *Então a integral de linha de* $\boldsymbol{F}$ ***ao longo de C*** *é:*

$$
\boxed{\int_C F \bullet dr = \int_a^b F(r(t)) \bullet r'(t)dt}
$$

Exemplo 13 *Calcule a integral de linha do campo vetorial* F *sobre a curva* C, $t \in [0,1]$. *Sendo:*

$$
\begin{aligned}
F &= \left\langle x^2y^3, -y\sqrt{x}\right\rangle \\
C : r(t) &= \left\langle t^2, t^3\right\rangle
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$*A parametrização da curva ja foi dada. Com isso, podemos fazer* $F(r(t))$.

$\rightarrow$*Com a finalidade de organizar as informações tidas, serão calculados* $F(r(t))$ *e* $r'(t)$ *antes da integral.*

$$
\begin{aligned}
F(r(t)) &= \left\langle t^4t^9, -t^3\sqrt{t^2}\right\rangle \\
r'(t) &= \left\langle 2t, 3t^2\right\rangle
\end{aligned}
$$

Tendo os dados em mãos, basta utilizar a definição de integrais de linha para campos vetoriais:

$$
\begin{aligned}
\int_C F \bullet dr &= \int_a^b F(r(t)) \bullet r'(t) dt \\
\int_C F \bullet dr &= \int_0^1 \left\langle t^4 t^9, -t^3 \sqrt{t^2} \right\rangle \bullet \left\langle 2t, 3t^2 \right\rangle dt \\
\int_C F \bullet dr &= \int_0^1 \left(2t^{14} + (-3) t^6 \right) dt \\
\int_C F \bullet dr &= \left[\frac{2}{15} t^{15} - \frac{3}{7} t^7 \right]_0^1 \\
\int_C F \bullet dr &= -\frac{31}{105}
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Unidade II

2.1 Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Considerando ∇f, uma derivada de f. Então o que segue abaixo seria um Teorema Fundamental do Cálculo para as Integrais de Linha.

Theorem 4 *Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $r(t)$, $t \in [a, b]$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então:*

$$\boxed{\int_C \nabla f \bullet dr = f(r(b)) - f(r(a))}$$

Exemplo 14 *Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial F para mover uma partícula de (0,1) a (2,3):*

$\vec{F}(x, y) = 2y^{3/2}\vec{i} + 3x\sqrt{y}\,\vec{j}$

→Verificar se é um campo vetorial conservativo, por:

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

→Após verificado é sabido que, se F é um campos vetorial, então $F = \nabla f$.

→Achar a função f.

→Com isso, podemos aplicar o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\
\frac{\partial 3x\sqrt{y}}{\partial x} &= \frac{\partial 2y^{3/2}}{\partial y} \\
3\sqrt{y} &= 3\sqrt{y}
\end{aligned}$$

Logo, o campo é conservativo. Então, o próximo passo é achar f.

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

Da definição de gradiente, sabemos que as funções f_x e f_y são, respectivamente, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Com isso, é intuitivo que a função f seja obtida fazendo as integrais nessas variáveis.

$$\begin{aligned}
f &= \int f_x dx \\
f &= \int f_y dy
\end{aligned}$$

Como essas integrais são indefinidas elas gerarão constantes. É interessante lembrar que quando se integra em x, y é considerado constante e vice-versa. Para o início da definição de f pode-se escolher qualquer uma das duas funções, f_x ou f_y. Aqui iniciaremos os cálculos com f_x, com isso aparecerá uma constante que poderá ser em função de y, aqui chamada de $c(y)$.

$$\begin{aligned}
f &= \int f_x dx \\
f &= \int 2y^{3/2} dx \\
f &= 2xy^{3/2} + c(y)
\end{aligned}$$

Uma vez feita a integral, falta-nos definir a constante de integração $c(y)$. Para isso derivaremos em y e compararemos o resultado obtido com o f_y fornecido no exemplo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial(2xy^{3/2} + c(y))}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x\sqrt{y} + c'(y)
\end{aligned}$$

Comparando o resultado vemos que $c'(y) = 0$. Agora integraremos em y para retornar para a função f.

$$
\begin{aligned}
f &= \int f_y dy \\
f &= \int 3x\sqrt{y}dy \\
f &= 2xy^{3/2} + c(x)
\end{aligned}
$$

Novamente, derivaremos em x e compararemos o resultado.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial(2xy^{3/2} + c(x))}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2y^{3/2} + c'(x)
\end{aligned}
$$

Assim vemos que $c'(x)$ também é zero. Portanto a constante de integração independe de x ou y. E ficamos com:

$f = 2xy^{3/2} + k$
Agora, basta aplicar o teorema fundamental do cálculo:

$$
\begin{aligned}
\oint_C F dr &= \oint_C \nabla f dr \\
\oint_C \nabla f dr &= f(2,3) - f(0,1) \\
&= 2 * 2 * 3^{3/2} + k - (2 * 0 * 1^{3/2} + k) \\
\oint_C \nabla f dr &= 4\sqrt{27}
\end{aligned}
$$

2.2 Teorema de Green

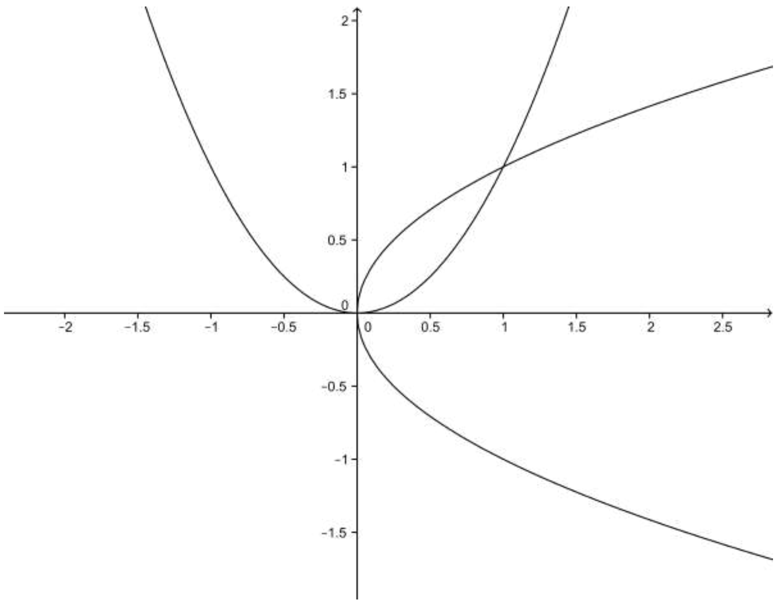
O Teorema de Green fornece uma relação entre as integrais de linha e as integrais Duplas. Será visto mais adiante que ele é uma forma mais simples, um caso especial melhor dizendo, do Teorema de Stokes.

Theorem 5 *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então:*

$$
\boxed{\oint_C F \bullet dr = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA}
$$

Exemplo 15 *Calcule a integral de linha $\oint Fdr$ onde C é a curva fronteira, orientada positivamente, da região delimitada pelas parábolas $y_1 = \pm\sqrt{x}$ e*

$y_2 = x^2$. Sabe-se também que:
$F = \left\langle y + e^{\sqrt{x}}, 2x + cos(y^2) \right\rangle$
.



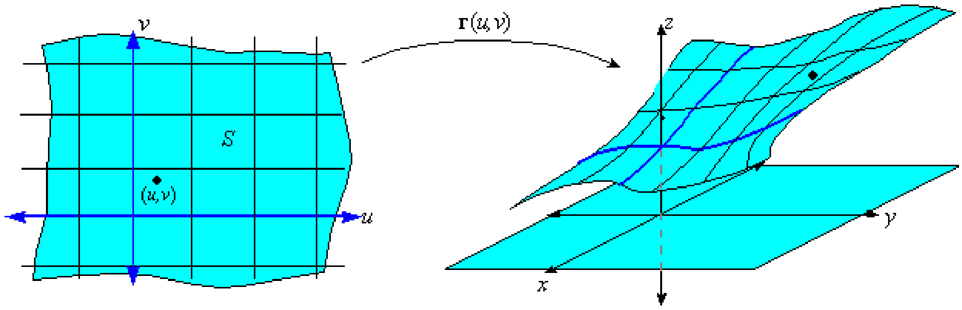
→A área de interesse é a região entre duas parábolas.

→Para determinar o ponto de intersecção basta igualar y_1 a y_2.

→É de bastante ajuda o gráfico dessas funções para a análise dos limites de integração.

$$\begin{aligned}
\oint F dr &= \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
\oint F dr &= \int\int_D \left(\frac{\partial(2x + cos(y^2))}{\partial x} - \frac{\partial(y + e^{\sqrt{x}})}{\partial y}\right) dA \\
\oint F dr &= \int_0^1 \int_0^{y^2} (2-1) dx dy \\
\oint F dr &= \int_0^1 y^2 dy \\
\oint F dr &= \left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^1 \\
\oint F dr &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2.3 Superfícies Paramétricas e Suas Áreas



Tal como foi feito com as curvas espaciais, usando um parâmetro t para suas parametrizações. A parametrização também pode ser aplicada em superfícies. Com isso, através de dois parâmetros u e v, por exemplo, pode-se ter uma descrição de uma superfície no $\Re^3$.

Quanto à área de superfícies, será visto que para tal cálculo serão usadas a parametrização de superfícies, bem como uma aproximação da área da superfície pela área de um plano, infinitesimal, tangente a ela.

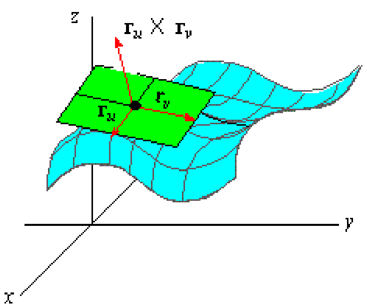


Figura 2.1 – Superfície Paramétrica e seu Plano Tangente. Fonte:math.etsu.edu. Acessado em: 19/08/2014

Sendo D *o domínio dos parâmetros* u *e* v, *e* S *a superfície que tem* x, y *e* z *como coordenadas. Através da parametrização obtem-se* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *e* $z(u,v)$. *Com isso, conforme são variados os paramêtros* u *e* v *é obtida a varredura da superfície* S.

Theorem 6 *Se uma superfície paramétrica lisa* S *é dada pela equação*

$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$$
$$(u,v) \in D$$

e S é coberto por uma única vez quando (u,v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a área de superfície de S é

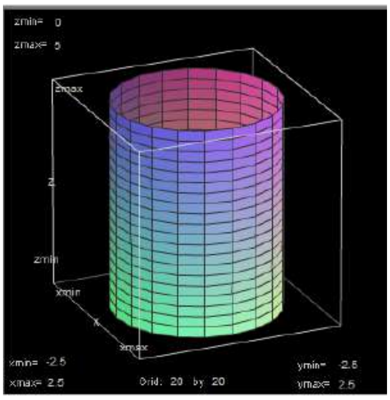
$$\boxed{A(S) = \int\int_D |r_u \times r_v| \, dA}$$

Exemplo 16 *Calcule a área de um cilindro, incluindo o fundo e o topo, de raio 2 e altura 5.*

→Para a área lateral será utilizada coordenada cilíndrica com $z \in [0,5]$, que é a altura.

→Para as extremidades, devido a simetria, basta calcular a área para uma extremidade e multiplicá-la por 2.

→Por questão de organização, serão feitos alguns cálculos introdutórios necessários para o cálculo da área superficial.



Para a lateral temos:

$$r(u,v) = \begin{cases} x &= 2cos(\theta) \\ y &= 2sen(\theta); \ \theta \in [0, 2\pi] \\ z &= z; \ z \in [0,5] \end{cases}$$

Uma vez definida a parametrização, os vetores tangentes podem ser obtidos:

$$\begin{aligned} r_\theta &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ r_\theta &= \langle -2sen(\theta), 2cos(\theta), 0 \rangle \\ r_z &= \frac{\partial r}{\partial z} \\ r_z &= \langle 0, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Com os vetores tangentes pode ser obtido a equação dos planos que tangenciam essa superfície. Lembrando que o vetor normal resultante deverá apontar para fora da superfície (Regra da mão direita).

$$r_\theta \times r_z = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2sen(\theta) & 2cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_\theta \times r_z = \langle 2cos(\theta), 2sen(\theta), 0\rangle$$

Para as extremidades temos:

$$r(r,\theta) = \begin{cases} x & = & rcos(\theta) \\ y & = & rsen(\theta) \\ z & = & 0 \; ou/e \; 5 \end{cases}$$

O cálculo do vetor normal para as extremidades é análogo, porém ele pode ser facilmente deduzido. Como estamos:
considerando um cilindro em z;
limitado entre os planos $z = 0$ e $z = 5$; e
o vetor normal sempre deverá apontar para fora da superfície, por definição.
Logo o vetor normal na parte inferior será $-\vec{k}$ e na parte superior será $+\vec{k}$. Que são os versores que apontam na direção negativa e positiva de z, respectivamente.

Tendo posse das parametrizações e dos vetores normais, podemos iniciar os cálculos.

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int\int_D |r_u \times r_v| \, dA \\
A(S) &= \int\int_D \left|\vec{k}\right| dA + \int\int_D \left|-\vec{k}\right| dA + \int\int_D |\langle 2cos(\theta), 2sen(\theta), 0\rangle| \, dA \\
A(S) &= 2\int\int_D \left|\vec{k}\right| dA + \int\int_D |\langle 2cos(\theta), 2sen(\theta), 0\rangle| \, dA \\
A(S) &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2} dr d\theta + \int_0^{5}\int_0^{2\pi} \sqrt{2^2(cos^2(\theta) + sen^2(\theta))} d\theta dz \\
A(S) &= 2 \; r|_0^2 \; \theta|_0^{2\pi} + 2 \; \theta|_0^{2\pi} \; z|_0^5 \\
A(S) &= 8\pi + 20\pi \\
A(S) &= 28\pi u.a.
\end{aligned}$$

2.4 Gradiente, Divergente e Rotacional

As três Operações apresentadas neste capítulo serão bastante usadas no decorrer desta disciplina como também em outras, como Mecânica dos Fluidos e Eletromagnetismo, portanto é de grande valia o entendimento das mesmas.

Tenha em mente, o que representam, como podem ser calculadas e quais as restrições de cada uma dessas operações.

2.4.1 O Operador Nabla

O nabla é usado em matemática para denominar o operador diferencial ∇ *no cálculo vetorial.*

$$\boxed{\nabla \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

2.4.2 Gradiente de Funções (Escalares)

Podendo ser calculado ***somente*** *em* ***funções escalares****, o gradiente de uma função escalar* ***resulta em uma função vetorial*** *que da a direção de máxima variação da função escalar calculada. Por isso, visualmente, o campo gradiente de uma função escalar apontará para a região de maior variação da função.*

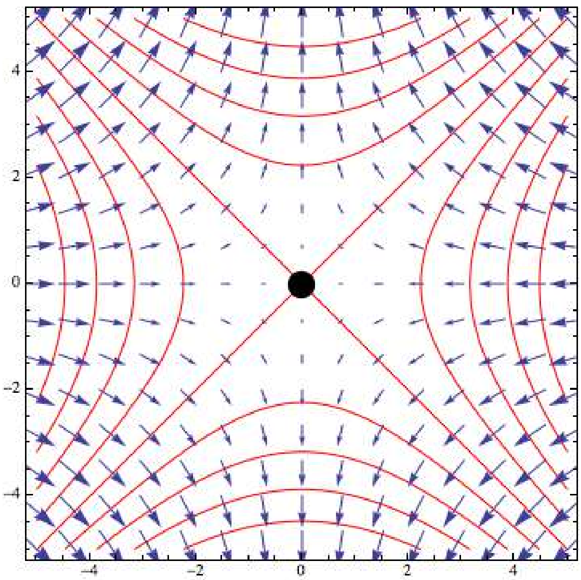


Figura 2.2 – Campo gradiente em um gráfico de curvas de nível (Equipotenciais).

Sendo $f(x, y, z)$ *uma função escalar, seu gradiente será dado por:*

$$\boxed{\nabla f \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

2.4.3 Divergente

Se $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ *é um campo vetorial em* $\Re^3$ *e existem* $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ *e* $\frac{\partial R}{\partial z}$, *então a divergência de* F *é uma função de três variáveis, definida por:*

$$\boxed{div\boldsymbol{F} = \nabla \bullet \boldsymbol{F} \quad = \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

2.4.4 Rotacional

Se $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ *é um campo vetorial em* $\Re^3$ *e as derivadas parciais em* P, Q *e* R *existem , então o rotacional de* F *é um campo vetorial no* $\Re^3$, *definido por:*

$$\boxed{rot\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} \quad = \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}}$$

Chega-se no mesmo resultado, fazendo:

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}}$$

Capítulo 3

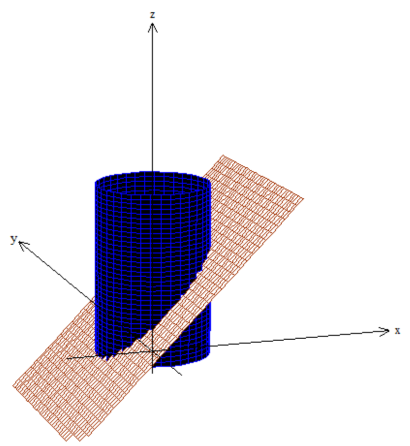
Unidade III

3.1 Integrais de Superfície

De modo semelhante como foi feito com a integral de linha através do comprimento de arco, podemos fazer para as integrais de superfície. Imagine uma superfície lisa, ou lisa por partes,S que está contida no domínio de uma função f, definida e contínua em S. Sendo D o domínio dos parâmetros u e v, a integral de f sobre S é definida por:

$$\boxed{\int\int_S f(x,y,z)dS = \int\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|r_u \bullet r_v|\,dA}$$

Exemplo 17 *Seja S a parte do cilindro $x^2+y^2=1$ entre os planos $z=0$ e $z=x+1$.*



a) Parametrize e esboce S.
b) Calcule $\int\int_S zdS$

→A parametrização é de um cilindro que varia entre valores de z, que neste caso é zero e uma função dependente de x.

→Feita a parametrização, o vetor normal deve ser calculado.

→Com os dois passos anteriores feitos, basta aplicar o conceito de integral de superfície.

Usamos θ e z como parâmetros para parametrizar S.
Temos:

$$a)\ r(\theta, z) = \begin{cases} x &= cos(\theta) \\ y &= sen(\theta) \\ z &= z \end{cases}$$
$$Onde\ \theta \in [0, 2\pi]\ e\ z \in [0, 1 + x = 1 + cos(\theta)].$$

b)O graduando deve ficar a vontade para a solução do vetor normal. Ela é feita de forma análoga ao exemplo já feito nesta apostila. Porém, esse vetor normal é facilmente obtido quando se observa que, em um cilindro, os vetores normais à superfície lateral serão sempre vetores com a direção e magnitude do raio .
Como no presente caso o raio é um, logo o módulo do vetor normal será também um, então: $|r_\theta \times r_z| = 1$.
Com isso:

$$\begin{aligned}
\int\int_S zdS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+cos(\theta)} zdzd\theta \\
\int\int_S zdS &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + cos(\theta))^2 - 0^2 d\theta \\
\int\int_S zdS &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2cos(\theta) + cos^2(\theta)\right) d\theta \\
\int\int_S zdS &= \frac{1}{2}\left[\theta + 2sen(\theta) + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{sen(\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\
\int\int_S zdS &= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

3.2 Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Theorem 7 *Se **F** for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com versor normal **n**, então a **integral de suoperfície de F** sobre S é:*

$$\boxed{\int\int_S \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S} = \int\int_S \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{n} dS}$$

Essa integral também é chamada de fluxo de $\boldsymbol{F}$ *sobre* S*.*

Exemplo 18 *Seja o campo vetorial* $\boldsymbol{F}$*=*$\langle x-y, y+x, z>$*. Calcule o fluxo de* $\boldsymbol{F}$ *através de* S *se* $S: x^2+y^2=a^2$ *com* $a>0$ *e* $z \in [0,h]$*.*

→Superfície: cilindro de raio 'a' e altura 'h'.

→Antes do cálculo da integral serão feitas a parametrização desse cilindro, com as devidas variações nos parâmetros; o cálculo do vetor normal aos planos tangentes; e a multiplicação escalar de $\vec{F} \bullet \vec{n}$*.*

$$\textbf{\textit{Parametrização}}\ r(\theta,z) = \begin{cases} x &= acos(\theta) \\ y &= asen(\theta),\ \theta \in [0,2\pi] \\ z &= z,\ z \in [0,h] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= r_\theta \times r_z \\ \textbf{\textit{Vetor normal}}\ \vec{n} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -asen(\theta) & acos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vec{n} &= \langle acos(\theta), asen(\theta), 0\rangle \end{aligned}$$

Escalar: $\vec{F} \bullet \vec{n}$

$$\begin{aligned} \vec{F} \bullet \vec{n} &= \langle acos(\theta) - asen(\theta), asen(\theta) + acos(\theta), z\rangle \bullet \langle acos(\theta), asen(\theta), 0\rangle \\ \vec{F} \bullet \vec{n} &= a^2 + a(cos(\theta) - sen(\theta)) \end{aligned}$$

Integral de Superfície: $\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int\int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} + \int\int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS}$ $+ \int\int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS}$

→ *Dividida em 3 partes: lateral, topo e embaixo. Sendo que no topo e embaixo, os vetores normais são* $\vec{k}$ *e* $-\vec{k}$*, respectivamente.*

$$\begin{aligned}
&\int\int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int_0^{2\pi}\int_0^h a^2 + a(cos(\theta) - sen(\theta))dzd\theta \\
&\int\int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int_0^{2\pi} za^2 + za(cos(\theta) - sen(\theta))\Big|_0^h d\theta \\
\textbf{\textit{Lateral}}\ &\int\int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int_0^{2\pi} ha^2 + ha(cos(\theta) - sen(\theta))d\theta \\
&\int\int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \theta ha^2 + ha^2(sen(\theta) + cos(\theta))\Big|_0^{2\pi} \\
&\int\int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} = 2\pi a^2 h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int\int_D \langle x-y, x+y, z\rangle \bullet \vec{k}\ dA \textit{no topo temos z=h} \\
\textbf{\textit{Topo}}\ &\int\int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int_0^{2\pi}\int_0^a hrdrd\theta \\
&\int\int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \pi a^2 h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int\int_D \langle x-y, x+y, z\rangle \bullet \vec{k}\ dA \textit{no topo temos z=0} \\
\textbf{\textit{Embaixo}}\ &\int\int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int_0^{2\pi}\int_0^a 0rdrd\theta \\
&\int\int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS} = 0
\end{aligned}$$

$$\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} = 3\pi a^2 h$$

Exemplo 19 *Calcule o fluxo de* $\vec{F} = \langle x, y, 0\rangle$ *para uma esfera de raio 'a'.*

$$\boxed{\begin{aligned}
x &= \rho * sen(\theta)cos(\phi) \\
y &= \rho * sen(\theta)sen(\phi) \\
z &= \rho * cos(\theta)
\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{n} = r_\theta \times r_\phi \\
\textbf{\textit{Vetor normal}}\ &\vec{n} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ acos(\theta)cos(\phi) & acos(\theta)sen(\phi) & -asen(\theta) \\ -asen(\theta)sen(\phi) & asen(\theta)cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \\
&\vec{n} = a^2 \left\langle sen^2(\theta)cos(\phi), sen^2(\theta)sen(\phi), sen(\theta)cos(\theta)\right\rangle
\end{aligned}$$

Escalar: $\vec{F} \bullet \vec{n}$

$$\begin{aligned}
\vec{F} \bullet \vec{n} &= a\left\langle cos(\phi)sen(\theta), sen(\theta)sen(\phi), 0\right\rangle \bullet a^2\left\langle sen^2(\theta)cos(\phi), sen^2(\theta)sen(\phi), sen(\theta)cos(\theta)\right\rangle \\
\vec{F} \bullet \vec{n} &= a^3cos^2(\phi)sen^3(\theta) + a^3sen^3(\theta)sen^2(\phi) \\
\vec{F} \bullet \vec{n} &= a^3sen^3(\theta)
\end{aligned}$$

Integral por substituição trigonométrica

$$\begin{aligned}
\int_a^b sen^3(t)dt &= \int_a^b sen^2(t)sen(t)dt \\
\int_a^b sen^3(t)dt &= \int_a^b (1 - cos^2(t))sen(t)dt \\
\int_a^b sen^3(t)dt &= \int_a^b sen(t) - cos^2(t)sen(t)dt \\
\int_a^b sen^3(t)dt &= -cos(t)\big|_a^b + \frac{1}{3}\,cos^3(t)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Integral de Superfície: $\displaystyle\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int\int_D \vec{F} \bullet \vec{n}\,dA$

$$\begin{aligned}
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int\int_D \vec{F} \bullet \vec{n}\,dA \\
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^3sen^3(\theta)d\theta d\phi \\
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} sen^3(\theta)d\theta \\
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} sen^3(\theta)d\theta \\
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3\left[-cos(\theta) + \frac{1}{3}cos^3(\theta)\right]_0^{\pi} [\phi]_0^{2\pi} \\
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3 * \frac{4}{3} * 2\pi \\
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \frac{8}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

3.3 O Teorema de Stokes

Sendo uma versão "3D"do ***Teorema de Green****, o* ***Teorema de Stokes*** *relaciona a* ***integral de linha da curva fronteira de S*** *com a* ***integral de superfície do rotacional de F****.*

Theorem 8 *Seja S uma superfície orientada, lisa por trechos, cuja fronteira é formada por uma curva C simples, fechada, lisa por trechos, com orientação positiva. Seja $\boldsymbol{F}$ um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região aberta de $\Re^3$ que contém S. Então*

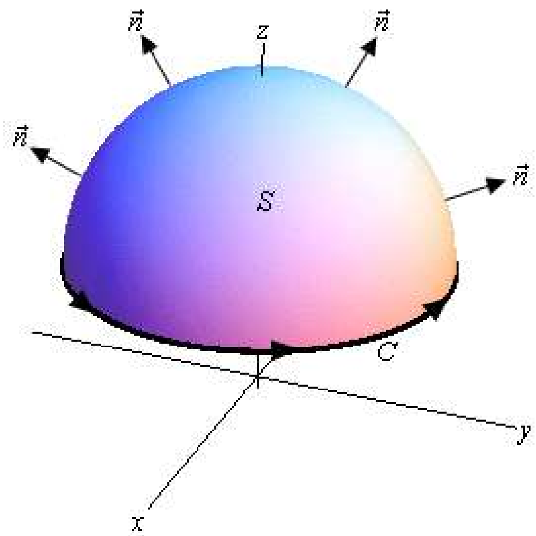
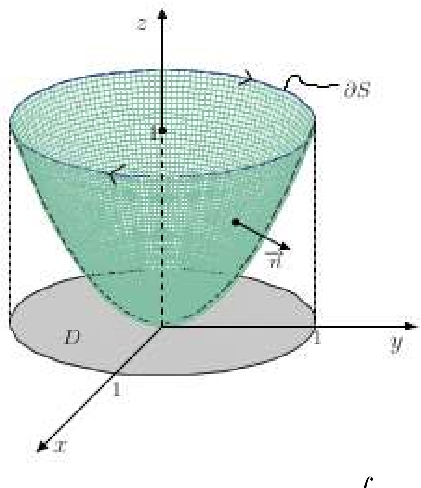


Figura 3.1 – Ilustração do Teorema de Stokes. Fonte:http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/StokesTheorem.aspx. Acessado em: ago/2014.

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \int \int_S rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}}$$

Exemplo 20 *Verifique o Teorema de Stokes onde $F = \langle y, -x, 0\rangle$ e a superfície é o parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ interseptado pelo plano $z = 1$.*



→O teorema é comprovado fazendo: $\int_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \int \int_S rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}$.

→ Portanto terão que ser calculadas a integral de linha da função e também a integral de superfície do rotacional da mesma.

Integral de linha

→*Para obter o resultado correto, é preciso calcular a integral de linha considerando a orientação positiva da superfície.*

→*Devido ao fato da orientação da superfície aparece o sinal negativo na integral. Em caso de não entendimento, vide 'Stewart'.*

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= -\int_0^{2\pi} \vec{F} \bullet \vec{r'(t)}\, dt \\
\oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= -\int_0^{2\pi} \langle sen(t), -cos(t), 0\rangle \bullet \langle -sen(t), cos(t), 0\rangle\, dt \\
\oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} (sen^2 t + cos^2 t) dt \\
\oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= 2\pi
\end{aligned}
$$

Integral de superfície

$$
\textbf{\textit{Rotacinal}} \quad
\begin{aligned}
rot\boldsymbol{F} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \\
rot\boldsymbol{F} &= \langle 0, 0, -2\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\textbf{\textit{Vetor normal}} \quad
\begin{aligned}
\vec{n} &= r_x \times r_y \\
\vec{n} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{bmatrix} \\
\vec{n} &= \langle -2x, -2y, 1\rangle
\end{aligned}
$$

Produto Escalar $rot\vec{F} \bullet \vec{n} = -2$

→*Atento para o fato de o domínio de parâmetros a seguir ser um círculo de raio unitário, portanto sua área será:* $A(D) = \pi u.a.$

$$
\textbf{\textit{Integral}}\quad
\begin{aligned}
\int\int_S rot\ \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int\int_D rot\ \vec{F} \bullet \vec{n}\ dA \\
\int\int_S rot\ \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int\int_D -2dA \\
\int\int_S rot\ \vec{F} \bullet \vec{dS} &= -2A(D) \\
A(D) &= \pi \\
\int\int_S rot\ \vec{F} \bullet \vec{dS} &= -2\pi
\end{aligned}
$$

3.4 Teorema da Divergência

O ***Teorema de Gauss****, também conhecido como Teorema da Divergência, relaciona a* ***integral de fluxo de F através de uma superfície S*** *com a* ***integral volumétrica do divergente de F por S****.*

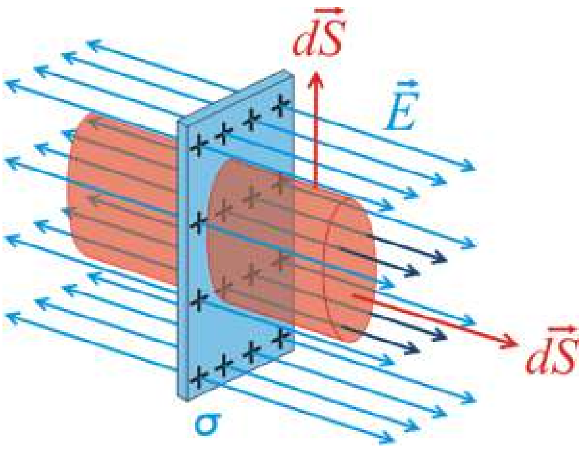


Figura 3.2 – Fluxo de um campo elétrico por uma superfície. Fonte: http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/electro/gauss.html. Acessado em: ago/2014.

Theorem 9 *Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja* $\boldsymbol{F}$ *um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então*

$$
\boxed{\int\int_S \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S} = \int\int\int_E div \boldsymbol{F} dV}
$$

Exemplo 21 *Verifique o Teorema de Gauss utilizando o exemplo* 18.

$$\begin{aligned}
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV \\
\int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV &= \int\int\int_V (1+1+1) dV = 3V_{cilindro} \\
\int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV &= 3\pi a^2 h
\end{aligned}$$

Exemplo 22 *Verifique o Teorema de Gauss utilizando o exemplo* 19.

$$\begin{aligned}
\int\int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV \\
\int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV &= \int\int\int_V (1+1+0) dV = 2V_{esfera} \\
\int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV &= 2(\frac{4}{3}\pi a^3) \\
\int\int\int_V div\boldsymbol{F} dV &= \frac{8}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$